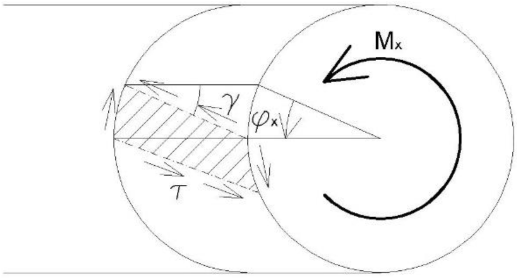
Volné kroucení prutů - teorie



Základní vztahy

Diferenciální podmínka rovnováhy pro namáhání prutu kroucením je

$$M_x' = -m_x$$

kde

M

M_x je kroutící moment (vnitřní síla)

m_x je spojité momentové zatížení kolem osy x

Poměrný úhel zkroucení (vzájemné natočení dvou průřezů na jednotku délky) je dán fyzikální podmínkou

$$\theta_x = \frac{M_x}{GI_t}$$

kde

G je modul pružnosti ve smyku (materiálová charakteristika)

I_t je moment setrvačnosti průřezu v kroucení (průřezová charakteristika)

Vztah mezi poměrným úhlem zkroucení a pootočením φ_x je dán geometrickou podmínkou

$$\varphi_x' = \theta_x$$

Integrací vztahu se získá

$$\varphi_x = \int \theta_x \, dx + C$$

Integrační konstantu *C* je možné určit z okrajové podmínky a tou je známé pootočení pro bod a. Pomocí tohoto známého posunu v bodě *a* je možno vyjádřit pootočení v libovolném bodě *b*.

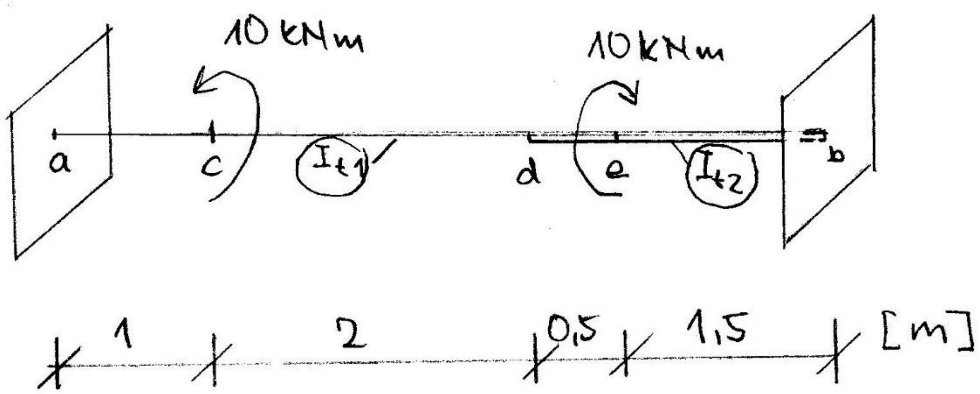
$$\varphi_b = \varphi_a + \int_a^b \theta_x dx = \varphi_a + \int_a^b \frac{M_t}{GI_t} dx$$

Pro veličiny M_x, *G* a I_t, konstantní v jednotlivých částech prutu, přejde integrál v sumační vyjádření

$$\varphi_b = \varphi_a + \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{x,i} L_i}{G_i I_{t,i}}$$

Příklad

Nosník oboustranně upnutý na kroucení je zatížením dle obrázku.



Nosník má po délce dvě různé tuhosti, pro něž platí $I_{t2} = 3.I_{t1}$. Modul pružnosti ve smyku je konstantní po celé délce nosníku.

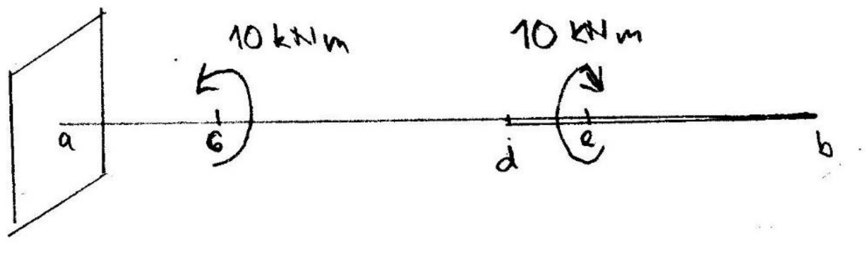
a) Vykreslete průběh krouticích momentů.
b) Vykreslete průběh pootočení

Řešení

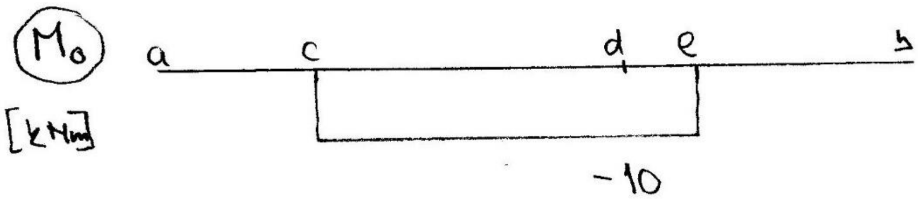
a) Průběhy kroutících momentů

Nosník je staticky neurčitě podepřen na kroucení – má dvě neznámé momentové reakce kolem osy x a k dispozici je jen jedna podmínka rovnováhy. K řešení staticky neurčité úlohy se použije silová metoda. Její podstata spočívá v tom, že jeden konec nosníku uvolníme z vazby. Vazbu nahradíme neznámou reakcí a také podmínkou kterou splňovala – tedy nulové pootočení φ_x. Z této přidané deformační podmínky je pak možno odvodit neznámou reakci.

Uvolněný nosník nejdříve zatížíme samotným zatížením nosníku



A získáme průběh krouticích momentů M_0



Z něj spočítáme pootočení na volném konci.

Pro pootočení nosníku platí vztah

$$\varphi_b = \varphi_a + \int_a^b \frac{M_x}{G.I_t} dx$$

V případě úseků s konstantními veličinami M_x , G a I_t lze integrál nahradit sumou

$$\varphi_b = \varphi_a + \sum \frac{M_{x,i} L_i}{G_i . I_{t,i}}$$

Zlomky počítáme pro úseky, kde je nenulový moment, tedy c-d a d-e. Tuhost ve druhém úseku nahradíme podle vztahu $I_{t2} = 3. I_{t1}$

$$\varphi_{b,0} = \sum \frac{M_{x,i} L_i}{G_i . I_{t,i}} = \frac{10^3}{G_i} \left(\frac{-10\,.\,2}{I_{t1}} + \frac{-10\,.\,0{,}5}{3. I_{t1}} \right) = \frac{-21{,}667.10^3}{G_i . I_{t1}}$$

Pak zatížíme nosník neznámou reakcí M_b

Stanovíme průběh kroutících momentů

A znovu spočítáme pootočení na volném konci. Tentokrát si rozdělíme nosník na úseky a-d a d-b.

$$\varphi_{b,1} = \sum \frac{M_{x,i} L_i}{G_i . I_{t,i}} = \frac{M_b}{G_i} \left(\frac{3}{I_{t1}} + \frac{2}{3. I_{t1}} \right) = \frac{3{,}667. M_b}{G_i . I_{t1}}$$

Výsledné pootočení bodu b je dáno oběma vlivy a podle deformační podmínky má být rovno nule

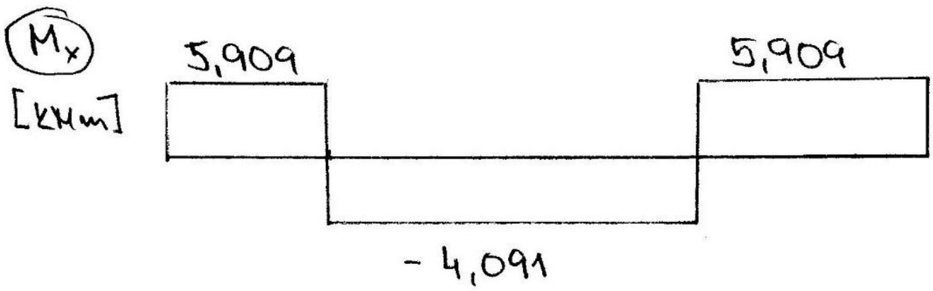
$$\varphi_b = \varphi_{b,0} + \varphi_{b,1} = 0$$

$$\frac{-21{,}667.10^3}{G_i.I_{t1}} + \frac{3{,}667.M_b}{G_i.I_{t1}} = 0$$

Z rovnice určíme velikost reakce M_b

$$M_b = 5{,}9191.10^3 = 5{,}9191\ kNm$$

Uvolněný nosník zatížíme vlastním zatížením a také, teď už známým momentem M_b. Na tomto staticky určitém nosníku vykreslíme průběhy krouticích momentů.



b) Průběhy pootočení

Protože nemáme zadány hodnoty momentů setrvačnosti v kroucení, ani hodnotu modulu pružnosti ve smyku, vyjádříme pootočení jako funkce G a I_{t1}

Pro pootočení nosníku platí vztah

$$\varphi_b = \varphi_a + \int_a^b \frac{M_x}{G.I_t} dx$$

V našem případě úseků s konstantními veličinami M_x , G a I_t lze integrál nahradit sumou

$$\varphi_b = \varphi_a + \sum \frac{M_{x,i} L_i}{G_i.I_{t,i}}$$

kde L_i jsou délky jednotlivých úseků.

Bod a je podepřený, má tedy nulové pootočení. Od něj budeme pokračovat ve výpočtu hodnot pro další body.

$$\varphi_c = \varphi_a + \frac{M_a L_{ac}}{G.I_{t1}} = 0 + \frac{5{,}909\ .\ 10^3\ .\ 1{,}0}{G.I_{t1}} = \frac{5{,}909\ .\ 10^3}{G.I_{t1}}$$

$$\varphi_d = \varphi_c + \frac{M_d L_{cd}}{G.I_{t1}} = \frac{5{,}909\ .\ 10^3}{G.I_{t1}} + \frac{-4{,}091\ .10^3.2{,}0}{G.I_{t1}} = \frac{-2{,}27\ .\ 10^3}{G.I_{t1}}$$

$$\varphi_e = \varphi_d + \frac{M_d L_{de}}{G.I_{t2}} = \frac{-2{,}27\ .\ 10^3}{G.I_{t1}} + \frac{-4{,}091\ .10^3.0{,}5}{G.3.I_{t1}} = \frac{-2{,}95\ .\ 10^3}{G.I_{t1}}$$

Pro kontrolu ještě dopočítáme hodnotu v bodě b

$$\varphi_b = \varphi_e + \frac{M_b L_{eb}}{G.I_{t2}} = \frac{-2{,}95\ .\ 10^3}{G.I_{t1}} + \frac{5{,}909\ .\ 10^3\ .1{,}5}{G.3.I_{t1}} = 0$$

Vypočtené hodnoty vyneseme do grafu a spojíme lineárním průběhem, protože derivace pootočení daná kroutícími momenty má průběh po částech konstantní.